Lösen von Gleichungen 4.Grades (reelle Koeffizienten)

Die quartische Gleichung **$p(x) = A \cdot x^4 + B \cdot x^3 + C \cdot x^2 + D \cdot x + E = 0$; $A \neq 0$** ist zu lösen .

Bevor wir zur allgemeinen Lösung übergehen betrachten wir einige

Sonderfälle:

Sonderfall 1 : **$E = 0$**

Hier lässt sich x ausklammern ($x = 0$ ist eine Lösung !) und es verbleibt **$A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D = 0$** , was sich mit der Formel von CARDANO lösen lässt .

Sonderfall 2 : **$B = 0$ und $C = 0$ und $D = 0$ und $E \neq 0$**

Zu lösen ist **$A \cdot x^4 = - E$** . bzw **$x^4 = - E / A$** .

2.1) Für **$E / A < 0$** ist $x^2 = \pm \sqrt{(- E / A)}$ reell, da der Radikand $- E / A$ positiv ist.

Wir erhalten für diesen Fall die Lösungen **$x_{1/2} = \pm \sqrt[4]{(- E / A)}$ sowie $x_{3/4} = \pm\, i \cdot \sqrt[4]{(- E / A)}$**

2.2) Für **$E / A > 0$** ist $x^2 = \pm\, i \cdot \sqrt{(E / A)}$ komplex, da der Radikand $- E / A$ negativ ist.
Wir erhalten 2 Paare komplexer Lösungen:
Aus dem Ansatz $x = a + i \cdot b$ folgt $x^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$
Durch Koeffizientenvergleich folgt $a^2 - b^2 = 0$ und $2ab = \sqrt{(E / A)}$.

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $a = \pm \sqrt[4]{(E / (4A))}$ und $b = \pm \sqrt[4]{(E / (4A))}$
Somit sind die 4 Lösungen

$$x_{1/2} = \sqrt[4]{(E / (4A))} \pm i \cdot \sqrt[4]{(E / (4A))} \quad \text{sowie} \quad x_{3/4} = - \sqrt[4]{(E / (4A))} \pm i \cdot \sqrt[4]{(E / (4A))}$$

Beispiel für **2.2**): $2 \cdot x^4 + 32 = 0$

Dann ist $E / A = 32 / 2 = 16 > 0$.

Die Lösungen sind $x_{1/2} = \sqrt[4]{(4)} \pm i \cdot \sqrt[4]{(4)}$ sowie $x_{3/4} = - \sqrt[4]{(4)} \pm i \cdot \sqrt[4]{(4)}$

bzw. vereinfacht: $x_{1/2} = \sqrt{(2)} \pm i \cdot \sqrt{(2)}$ sowie $x_{3/4} = - \sqrt{(2)} \pm i \cdot \sqrt{(2)}$

Sonderfall 3 : **$B = 0$ und $D = 0$**

Dies lässt sich mit dem nachfolgend beschriebenen allgemeinen Verfahren nicht lösen !
Es entsteht eine sog. "biquadratische Gleichung" der Form **$A \cdot z^2 + C \cdot z + E = 0$** mit **$z = x^2$**

Die beiden Lösungen für $z = x^2$ erhält man durch Anwendung der Mitternachts-Formel:

$$z_{1/2} = [- C \pm \sqrt{(C^2 - 4 \cdot A \cdot E)}] / (2 \cdot A)$$

Anschließend sind noch $x_{1/2} = \pm \sqrt{(z_1)}$ und $x_{3/4} = \pm \sqrt{(z_2)}$ zu lösen !

Das Problem ist hier, dass die Lösungen bereits für z komplex sein können.
Dann müssen die x-Werte als Quadratwurzeln von komplexen Zahlen gezogen werden (s. unten) !!

Beispiele für den Sonderfall 3:

1) $\mathbf{x^4 + 5x^2 + 4 = 0}$ $z_1 = -1$ $z_2 = -4$ 4 Lösungen: $x_{1/2} = \pm\ i$ $x_{3/4} = \pm\ 2 \cdot i$

2) $\mathbf{x^4 + x^2 - 2 = 0}$ $z_1 = 1$ $z_2 = -2$ Zu lösen ist: $x^2 = 1$ sowie $x^2 = -2$

Die 4 Lösungen kann man sofort angeben: $x_{1/2} = \pm\ 1$ $x_{3/4} = \pm\ \sqrt{(2)} \cdot i$

3) $\mathbf{x^4 - 4x^2 + 5 = 0}$ $z_1 = 2 - i$ $z_2 = 2 + i$ Zu lösen ist: $x^2 = 2 - i$ sowie $x^2 = 2 + i$

Die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl z kann man mit dem Ansatz des Beispiels von Sonderfall 2.2 lösen oder (einfacher) mit folgender Formel:

$x^2 = a + b \cdot i$ hat in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen 2 Lösungen:

$$x_k = \sqrt[4]{a^2 + b^2} \cdot [\cos(\frac{\arctan(\frac{b}{a}) + k \cdot 2\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\arctan(\frac{b}{a}) + k \cdot 2\pi}{2})] \text{ für } k = 0 \text{ und } k = 1$$

Z.B. gilt also für das obige $x^2 = 2 + i$:

$$x_k = \sqrt[4]{5} \cdot [\cos(\frac{\arctan(0,5) + k \cdot 2\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\arctan(0,5) + k \cdot 2\pi}{2})] \text{ für } k = 0 \text{ und } k = 1$$

Somit ergeben sich für $x^2 = 2 - i$ sowie $x^2 = 2 + i$ insgesamt die 4 Lösungen:

$x_{1/2} = 1{,}455346690225355 \pm 0{,}3435607497225124 \cdot i$
$x_{3/4} = -1{,}4553466902253547 \pm 0{,}3435607497225127 \cdot i$

<u>Exaktes Ergebnis</u> (mit Ansatz $x = a + i \cdot b$) :

$x_{1/2} = \sqrt{(1 + \sqrt{(1{,}25)})} \pm \sqrt{(-1 + \sqrt{(1{,}25)})} \cdot i$ $x_{3/4} = -\sqrt{(1 + \sqrt{(1{,}25)})} \pm \sqrt{(-1 + \sqrt{(1{,}25)})} \cdot i$

Der allgemeine Fall ($B \neq 0$ oder $D \neq 0$) :

Hinweis: Weitere Sonderfälle werden nicht betrachtet, weil sie sich mit dem allg. Fall lösen lassen !

Division der Ausgangsgleichung durch A führt auf das normierte Polynom

$$p1(x) = x^4 + B/A \cdot x^3 + C/A \cdot x^2 + D/A \cdot x + E/A .$$

Zu lösen ist dann $\mathbf{x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0}$ mit $a = B/A \quad b = C/A \quad c = D/A \quad d = E/A$.

Zur Lösung dieses allgemeinen Problems verwenden wir die Methode der Zerlegung von p1(x) in quadratische Faktoren :

$$\mathbf{x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot (x^2 + r \cdot x + t)}$$

Dass diese Zerlegung immer möglich ist, sieht man, wenn die Klammerterme multipliziert werden.

Es entsteht dann $(x^2 + p \cdot x + q)(x^2 + r \cdot x + t) = x^4 + (r+p) \cdot x^3 + (t + p \cdot r + q) \cdot x^2 + (p \cdot t + q \cdot r) \cdot x + q \cdot t$!

Man setzt dann die beiden quadratischen Terme = 0 und wendet die **p-q-Formel** an !

Mögliche Lösungen:

- 4 reelle Zahlen
- 2 reelle und 2 konjugiert komplexe Zahlen
- 2 Paare konjugiert komplexer Zahlen

Wie findet man nun eine solche Zerlegung mit $r+p = a \quad t + p \cdot r + q = b \quad p \cdot t + q \cdot r = c \quad q \cdot t = d$?

Lösung (nach **Dr. Joachim Mohr** ; ergänzt von Karl Achilles):

- Suche eine (reelle) Lösung der kubischen Gleichung

$$\mathbf{u^3 - 2 \cdot b \cdot u^2 + (a \cdot c + b^2 - 4 \cdot d) \cdot u + c^2 - a \cdot b \cdot c + a^2 \cdot d = 0}$$

Achtung: Für den Sonderfall $\mathbf{c^2 - a \cdot b \cdot c + a^2 \cdot d = 0}$ ist $\mathbf{u = 0}$ eine Lösung dieser Gleichung

- Berechne die reelle Zahl w:

$\mathbf{w = \sqrt{(a^2 - 4 \cdot u)}}$; es gibt ein reelles u mit $\mathbf{4u \leq a^2}$, so dass w ebenfalls reell ist !
Sofern 3 reelle Lösungen für u existieren, so wähle man die kleinste oder aber zumindest eine negative Lösung (falls möglich), da w reell sein muss.

Somit kann man p, q, r, t folgendermaßen berechnen (falls $\mathbf{w = 0}$, dann gelten für q, t **Sonderfälle** !!):

$\mathbf{p = (a + w) / 2}$

Falls w = 0, dann $\mathbf{q = (c + \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot d)}) / a}$
sonst $\mathbf{q = ((b - u)(w + a) - 2 \cdot c) / (2 \cdot w)}$

$\mathbf{r = (a - w) / 2}$

Falls w = 0, dann $\mathbf{t = (c - \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot d)}) / a}$
sonst $\mathbf{t = ((b - u) \cdot (w - a) + 2 \cdot c) / (2 \cdot w)}$

Hinweis: Wollte man den anfangs betrachteten Sonderfall ($a = c = 0$) mit der allgemeinen Formel lösen, so ergäbe sich

$$\mathbf{u^3 - 2 \cdot b \cdot u^2 + (b^2 - 4 \cdot d) \cdot u = 0}$$

mit der reellen Lösung $u = 0$, die $w = 0$ zur Folge hat.
Dann lässt sich aber q nicht berechnen, da wegen $a = 0$ eine Division durch 0 vorläge.

Beispiele:

Beispiel 1: $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, also $a = 1$ $b = -1$ $c = 1$ $d = -2$

Eine Lösung von $u^3 + 2u^2 + 10u + 0 = 0$ ist $u = 0$. Dann ist $w = 1$.

Es folgt: $p = 1$ $q = -2$ $r = 0$ $t = 1$

$x^2 + x - 2 = 0$ hat die Lösungen **$x = 1$ sowie $x = -2$**

$x^2 + 1 = 0$ hat die Lösungen **$x = i$ sowie $x = -i$**

Somit sind alle 4 Lösungen gefunden worden.

Beispiel 2: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, also $a = -10$ $b = 35$ $c = -50$ $d = 24$

Eine Lösung von $u^3 - 70u^2 + 1629u - 12600 = 0$ ist $u = 21$. Dann ist $w = 4$.

Es folgt: $p = -3$ $q = 2$ $r = -7$ $t = 12$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ hat die Lösungen **$x = 1$ sowie $x = 2$**

$x^2 - 7x + 12 = 0$ hat die Lösungen **$x = 3$ sowie $x = 4$**.

Beispiel 3: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = 0$, also $a = -2$ $b = 6$ $c = -8$ $d = 8$

Eine Lösung von $u^3 - 12u^2 + 20u = 0$ ist $u = 0$. Dann ist $w = 2$.

Es folgt: $p = 0$ $q = 4$ $r = -2$ $t = 2$

$x^2 + 4 = 0$ hat die Lösungen **$x = 2i$ sowie $x = -2i$**

$x^2 - 2x + 2 = 0$ hat die Lösungen **$x = 1 + i$ sowie $x = 1 - i$**

Beispiel 4: $x^4 - 43x^2 + 150x - 144 = 0$, also $a = 0$ $b = -43$ $c = 150$ $d = -144$

Eine Lösung von $u^3 + 86u^2 + 2425u + 22500 = 0$ ist $u = -25$. Dann ist $w = 10$.

Es folgt: $p = 5$ $q = -24$ $r = -5$ $t = 6$

$x^2 + 5x - 25 = 0$ hat die Lösungen **$x = 3$ sowie $x = -8$**

$x^2 - 5x + 6 = 0$ hat die Lösungen **$x = 2$ sowie $x = 3$**

$u^3 - 2 \cdot b \cdot u^2 + (a \cdot c + b^2 - 4 \cdot d) \cdot u + c^2 - a \cdot b \cdot c + a^2 \cdot d = 0$

Weitere Beispiele (Computerlösungen):

1) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

```
x1 = -0,809016994374947 - 0,587785252292473·i
x2 = -0,809016994374947 + 0,587785252292473·i
x3 =  0,309016994374947 - 0,951056516295154·i
x4 =  0,309016994374947 + 0,951056516295154·i
```

2) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

```
x1 = -1
x2 = -1
x3 = -1
x4 = -1
```

3) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$

```
x1 = -3
x2 = -3
x3 = 2
x4 = 2
```

4) $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 30x + 25$

```
x0 = -2 - 0,999999999999999·i
x1 = -2 + 0,999999999999999·i
x2 = -1 - 2·i
x3 = -1 + 2·i

korrigiert:
x1 = -2 - i
x2 = -2 + i
x3 = -1 - 2·i
x4 = -1 + 2·i
```

5) $x^4 - x^3 + 6x^2 + 14x - 20$

```
x1 = -2
x2 =  1
x3 =  1 - 3·i
x4 =  1 + 3·i
```

6) $10x^4 - 15x^3 - 45x^2 - 5x + 15$

```
x1 = -1
x2 =  -1
x3 =  0,5
x4 =  3
```